الهندسة الفراغية

الوحدة الثانية

الملخص

إعداد الأستاذ

حسن ممدوح

Scan me

01069781609

01287882728

01226183298

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات في الفراغ

* معادلة المستقيم في الفراغ *

متجه وحدة في اتجاه مستقيم

$\overrightarrow{ى} = ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع}$

$ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{ى} = ك\,(ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع})$

$= (أ ، ب ، جـ)$

حيث

ل = جتا θس ، م = جتا θص ، ن = جتا θع

جيوب تمام الاتجاه لهذه المستقيم في الفراغ

أ، ب، جـ تتناسب مع ل، م، ن تسمى نسب اتجاه المستقيم

خد بالك

- إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ نقطتان على المستقيم متجه الاتجاه لهذا المستقيم $= \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$
- إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل والنقطة أ (أس، أص، أع) تقع عليه ∴ $\overrightarrow{أ}$ هو متجه الاتجاه لهذا المستقيم
- المستقيم الذي متجه اتجاهه $\overrightarrow{ى}$ = (أ، ب، ٠) يقع في مستوى // المستوى س ص
- المستقيم الذي اتجاهه (٠، ب، جـ) يقع في مستوى // المستوى ص ع
- المستقيم الذي متجه اتجاهه (أ، ٠، جـ) يقع في مستوى // المستوى س ع

* الصور المختلفة لمعادلات المستقيم في الفراغ

الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم

$$\vec{ر} = \vec{أ} + ل\,\vec{ه}$$

- $\vec{ر}$: متجه موضع نقطة على مستقيم
- $\vec{أ}$: متجه موضع نقطة معطاه على مستقيم
- ل: ثابت ∈ ح*
- $\vec{ه}$: متجه اتجاه المستقيم

المعادلة البارامترية للخط المستقيم

س = س$_1$ + ل أ

ص = ص$_1$ + ل ب

ع = ع$_1$ + ل جـ

الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم "الصورة الكارتيزية"

ل = $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}}$ ، ل = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$

ل = $\frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

∴ $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

(س ، ص ، ع) = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) + ل (أ ، ب ، جـ)

صورة أخرى للمعادلة المتجهة للخط المستقيم

ملاحظات

الصورة الإحداثية لمعادلة المستقيم

* في حالة أ = ٠ *

$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$ ، س = س$_1$

* في حالة ب = ٠ *

$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$ ، ص = ص$_1$

* في حالة جـ = ٠ *

$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ ، ع = ع$_1$

∵ أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن

∴ يمكن كتابة المعادلة

$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$

* معادلة مستقيم // المحور ص ويمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

هي س = س$_1$ ، ع = ع$_1$

* معادلة المستقيم // المحور س ويمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

هي ص = ص$_1$ ، ع = ع$_1$

* معادلة المستقيم // المحور ع ويمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

هي س = س$_1$ ، ص = ص$_1$

الصور المختلفة لمعادلات المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ومتجه الاتجاه له (أ ، ب ، جـ)

"الصورة الاتجاهية"

$\vec{ر}$ = ل (أ ، ب ، جـ)

"المعادلات البارامترية"

س = ل أ ، ص = ل ب

ع = ل جـ

"الصورة الإحداثية"

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جـ}}$

خد بالك :

اذا كان المستقيم //

- محور السينات او متجه اتجاهه هو محور السينات فإن متجه اتجاهه (١ ، ٠ ، ٠)
- محور الصادات او متجه اتجاهه هو محور الصادات فإن متجه اتجاهه (٠ ، ١ ، ٠)
- محور ع او متجه اتجاهه هو محور ع فإن متجه اتجاهه (٠ ، ٠ ، ١)

الزاوية بين مستقيمين : الزاوية الصغرى بين المستقيمين ل١ ، ل٢

- $\overrightarrow{هـ_1}$ = (أ١ ، ب١ ، جـ١) متجه اتجاه ل١
  $\overrightarrow{هـ_2}$ = (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢) متجه اتجاه ل٢

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_1} \cdot \overrightarrow{هـ_2}|}{\|\overrightarrow{هـ_1}\|\,\|\overrightarrow{هـ_2}\|}$$

- اذا كانت (ل١ ، م١ ، ن١) ، (ل٢ ، م٢ ، ن٢) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

$$\text{جتا}\,\theta = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$$

المستقيمان

المستقيمان المتوازيان في الفراغ

$\overrightarrow{\text{ه}}_1 = (\text{أ}_1 ، \text{ب}_1 ، \text{ج}_1)$ متجه اتجاه ل$_1$

$\overrightarrow{\text{ه}}_2 = (\text{أ}_2 ، \text{ب}_2 ، \text{ج}_2)$ متجه اتجاه ل$_2$

اذا كان ل$_1$ // ل$_2$ فإن

(1) $\overrightarrow{\text{ه}}_1 = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ه}}_2$ حيث ك ∈ ح

(2) $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{ج}_1}{\text{ج}_2}$

(3) $\overrightarrow{\text{ه}}_1 \times \overrightarrow{\text{ه}}_2 = \overrightarrow{\text{و}}$

خد بالك

اذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على احدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمان متطابقان

* اذا لم يحقق المستقيمان أحد شروط التوازي فإن المستقيمان

متقاطعان — متخالفان

المتعامدان في الفراغ

$\overrightarrow{\text{ه}}_1 = (\text{أ}_1 ، \text{ب}_1 ، \text{ج}_1)$ متجه اتجاه ل$_1$

$\overrightarrow{\text{ه}}_2 = (\text{أ}_2 ، \text{ب}_2 ، \text{ج}_2)$ متجه اتجاه ل$_2$

فإن ل$_1$ ⊥ ل$_2$ اذا كان:

$\overrightarrow{\text{ه}}_1 \cdot \overrightarrow{\text{ه}}_2 = \text{صفر}$

$\text{أ}_1\text{أ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 + \text{ج}_1\text{ج}_2 = \text{صفر}$

ملحوظة

المستقيمان المتعامدان اما ان يكونا متقاطعين وعندئذ يجمعهما مستوى واحد اما ان يكونا متخالفين وعندئذ لا يجمعهما مستوى واحد

* **ملحوظة:** (1) المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد

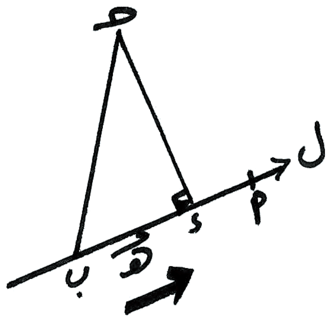
(2) اذا كان المستقيمين الغير متوازيين $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1) + \text{ك}_1(\text{أ}_1 ، \text{ب}_1 ، \text{ج}_1)$

$\overrightarrow{\text{ر}}_2 = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2 ، \text{ع}_2) + \text{ك}_2(\text{أ}_2 ، \text{ب}_2 ، \text{ج}_2)$

اذا وجدت قيمة لكل من ك$_1$ ، ك$_2$ تحقق ان $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{ر}}_2$ فإن المستقيمين متقاطعين

اذا لم يوجد قيمة لكل من ك$_1$ ، ك$_2$ تحقق $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{ر}}_2$ المستقيمان متخالفان

* المسافة بين نقطة ومستقيم *



(1) نوجد ب جـ = $\|\overrightarrow{\text{ب جـ}}\|$

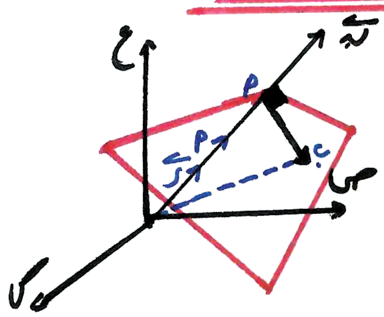
(2) نوجد ب ء = مقياس مسقط $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ على $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

$$= \frac{\|\overrightarrow{\text{ب جـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب أ}}\|}{\|\text{ب أ}\|}$$

(3) نوجد البعد العمودي جـ ء من فيثاغورث $= \sqrt{(\text{ب جـ})^2 - (\text{ب ء})^2}$

ملحوظة: يمكن استخدام $\overrightarrow{\text{ى}}$ بدلاً من $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

معادلة المستوى في الفراغ



الصور المختلفة لمعادلة المستوى

- **الصورة المتجهة لمعادلة المستوى**

  $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

  $\overrightarrow{\text{ن}}$: متجه عمودي على المستوى

- **الصورة القياسية لمعادلة المستوى**

  $\text{أ}(\text{س} - \text{س}_1) + \text{ب}(\text{ص} - \text{ص}_1) + \text{جـ}(\text{ع} - \text{ع}_1) = 0$

- **الصورة العامة لمعادلة المستوى**

  أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر

  $\text{ء} = -\text{أ س}_1 - \text{ب ص}_1 - \text{جـ ع}_1$

ملحوظة

- مركبات متجه الاتجاه العمودي على المستوى هي معاملات س، ص، ع من المعادلة العامة
- $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ من المعادلة المتجهة للمستوى = − ء من المعادلة العامة
- اذا كان ء = صفر فإن المستوى يحتوي نقطة الأصل

معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

∵ أ ، ب ، جـ ثلاث نقط يجب التأكد ان $\overrightarrow{أب}$ لا يوازي $\overrightarrow{أجـ}$ ثم نجد المعادلة عن طريق:

(١)

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix}$$

(٢)

(١) نوجد $\overrightarrow{ن}$ متجه $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$

(٢) ثم نستخدم الصور المختلفة لمعادلة المستوى

* علاقة مستقيم بالمستوى في الفراغ *

عند حل معادلة المستقيم مع معادلة المستوى وكانت

* مجموعة الحل = $\emptyset$ فإن المستقيم // المستقيم
* مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى
* اذا اشترك المستقيم والمستوى في أكثر من نقطة فإن المستقيم ينطبق على المستوى

اذا كان $\overrightarrow{ن_1}$ ، $\overrightarrow{ن_2}$ هما متجهين العموديين على المستويين

المستويان المتوازيان اذا كان

$$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$$

فإن: $\overrightarrow{ن_1} // \overrightarrow{ن_2}$

المستويان المتعامدان اذا كان

$\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2} =$ صفر

$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 =$ صفر

فإن المستويين متعامدين

ملحوظة

اذا كان
$$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \ne \frac{د_1}{د_2}$$
∴ المستويان متوازيان وغير متطابقين

اذا كان
$$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{د_1}{د_2}$$
∴ المستويان ينطبقان

---

* الزاوية بين مستويين

هو قياس الزاوية بين

$\vec{ن}_1$ المتجه العمودى على المستوى الاول

$\vec{ن}_2$ المتجه العمودى على المستوى الثانى

$$جتا \theta = \frac{|\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\| \|\vec{ن}_2\|}$$

حيث $0 < \theta < 90$

* الزاوية بين مستقيم ومستوى

$\vec{هـ}$ (أ$_1$، ب$_1$، جـ$_1$) متجه اتجاه المستقيم

$\vec{ن}$ (أ$_2$، ب$_2$، جـ$_2$) متجه عمودى على المستوى

$$جتا \theta = \frac{|\vec{هـ} \cdot \vec{ن}|}{\|\vec{هـ}\| \|\vec{ن}\|}$$

α هى الزاوية بين المستقيم والمستوى

حيث $\alpha = 90 - \theta$

---

* معادلة المستوى بمعلومية الاجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات *

اذا قطع المستوى محاور الاحداثيات فى النقطة (س$_1$، 0، 0) (0، ص$_1$، 0) (0، 0، ع$_1$)

معادلة المستوى ←
$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

ملاحظات هامة

(١) إذا كان أ = ٠ فإن:
ب ص + جـ ع + د = ٠
هي معادلة مستوى // محور س وعمودي على ص ع

(٢) إذا كان ب = ٠ فإن
أ س + جـ ع + د = ٠
معادلة مستوى // المحور ص وعمودي على س ع

(٣) إذا كان جـ = ٠ فإن
أ س + ب ص + د = ٠
معادلة مستوى // المحور ع وعمودي على س ص

---

(١) إذا كان أ = د = ٠
فإن ب ص + جـ ع = ٠
معادلة مستوى يحتوي محور س وعمودي على ص ع

(٢) إذا كان ب = د = ٠
فإن أ س + جـ ع = ٠
معادلة مستوى يحتوي محور ص وعمودي على س ع

(٣) إذا كان جـ = د = ٠
فإن أ س + ب ص = ٠
معادلة مستوى يحتوي محور ع وعمودي على س ص

---

(١) معادلة المستوى س ص هي ع = ٠
إذا كان المستوى يوازي المستوى س ص ويمر بالنقطة (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) فإن معادلته ع = ع$_1$

(٢) معادلة المستوى ص ع هي س = ٠
معادلة المستوى الذي يوازي المستوى ص ع ويمر بالنقطة (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) هي س = س$_1$

(٣) معادلة المستوى س ع هي ص = ٠
معادلة المستوى الذي يوازي المستوى س ع ويمر بالنقطة (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) هي ص = ص$_1$

ملحوظة حلوة

إذا كانت هـ (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) وكان التعويض عنهما في معادلة المستوى
أ س$_1$ + ب ص$_1$ + جـ ع$_1$ + د = ٠
فإن (هـ) تنتمي للمستوى

إذا كانت و (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) وكان التعويض عنها في معادلة المستوى أ س$_2$ + ب ص$_2$ + جـ ع$_2$ + د > ٠
فإن (و) لا تنتمي للمستوى

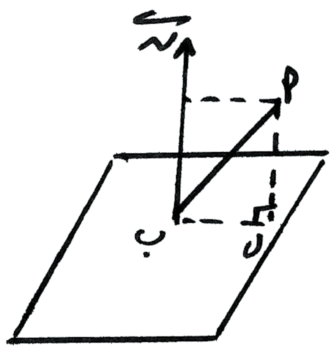
إذا كانت ر (س$_3$، ص$_3$، ع$_3$) وكان التعويض عنها في معادلة المستوى
أ س$_3$ + ب ص$_3$ + جـ ع$_3$ + د < ٠
فإن (ر) لا تنتمي للمستوى

ومع ذلك أن كل منها تقع في جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى

طول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

$\vec{n}$ متجه عمودي على المستوى

ب نقطة داخل المستوى ، أ نقطة خارج المستوى



$$ل = \frac{|\overrightarrow{بأ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

حيث أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $\vec{n}$ (أ ، ب ، جـ)

معادلة المستوى أس + ب ص + جـ ع + د = ٠

∴ الصورة الإحداثية لطول العمود هي $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$

ملحوظة

لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين

(١) نوجد نقطة على أحدهما

(٢) نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر

* معادلة خط تقاطع مستويين *

إذا كان $ط_1$: $أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع + د_1 = ٠$ ،

$ط_2$: $أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع + د_2 = ٠$ ، إذا كانت النسب

$\frac{أ_1}{أ_2}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2}$ ، $\frac{جـ_1}{جـ_2}$ ليست جميعها متساوية ∴ المستويين متقاطعين

ويمكن إيجاد معادلة خط التقاطع عن طريق عدة طرق

(١)

بحل معادلتي المستويين معاً
وإيجاد متغير بين بدلالة
متغير آخر مشترك

ع ، ص بدلالة س
"نحصل على معادلة خط التقاطع"

(٢)

خط التقاطع يكون عمودي على متجهي
الاتجاه العموديين على المستويين
$\vec{ن}_1$ ، $\vec{ن}_2$

(١) هـ = $\vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2$ هو متجه اتجاه خط التقاطع

(٢) نوجد نقطة تنتمي لخط التقاطع

(٣) يصبح لدينا نقطة ومتجه ونستطيع
إيجاد معادلة خط التقاطع

من أجل نجاحك لا تهتم درجة ذكائك
بقدر ما تهتم درجة مثابرتك ...
فلا يمكنك تسلق سلم النجاح
ويداك في جيبك